Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Präsenzblatt — 20./21. Oktober 2022

Aufgabe 1: Skizziere die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ im kartesischen Koordinatensystem.

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\right\}, \quad M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\right\},$$

$$M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 = x\right\}, \quad M_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}\right\}.$$

Aufgabe 2: Eine *affin-lineare* Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt für $a, b \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$f(x) = ax + b \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimme eine affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = -1$ und $f(1) = 2$.
Ist f somit *eindeutig* bestimmt oder gibt es eine weitere solche Funktion?

(b) Bestimme eine Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(-1) = 0 = g(4)$ und $g(1) = 4$.
Ist g affin-linear? Ist g eindeutig bestimmt oder gibt es eine weitere solche Funktion?

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein quadratisches Polynom, für $b, c \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x^2 + bx + c \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Leite die *Gleichungen von Vieta* her, wonach reelle Nullstellen $x_{1,2}$ von f den Bedingungen

$$x_1 + x_2 = -b \qquad \text{und} \qquad x_1 x_2 = c$$

genügen. Zeige für $c \neq 0$ außerdem, dass Lösungen x_1, x_2 der Gleichungen von Vieta die Nullstellen von f sind.

Aufgabe 4: Für $p, q > 0$ seien $u, v \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $u^3 + v^3 = q$ und $uv = -p/3$.

(a) Zeige, dass $x_0 := u + v$ eine Nullstelle des Polynoms $f(x) := x^3 + px - q$ ist.

(b) Zeige, dass u^3 und v^3 die Nullstellen des Polynoms $g(y) := y^2 - qy - p^3/27$ sind.

(c) Stelle u und v jeweils als Ausdruck in p und q dar.

Bestimme nun unter Verwendung von (a)-(c) mit Polynomdivision die Nullstellen von

$$h(z) := z^3 + 63z - 316.$$